158 Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes

Soit $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. E un K-e.v de dim. n.

I Généralités

1) Définitions et premières propriété

Définition 1 Soit $M \in M_n(K)$.
- On dit que M est symétrique si $M = {}^tM$
- On dit que M est antisymétrique si $M = -{}^tM$.

On note $S_n(K)$ l'ensemble des matrices symétriques et $A_n(K)$ l'ensemble des matrices antisymétriques.

Remarque 2 Les termes diagonaux d'une matrice antisymétrique sont nulles

Proposition 3 On a : $M_n(K) = S_n(K) \oplus A_n(K)$.
De plus, $\dim(S_n(K)) = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\dim(A_n(K)) = \frac{n(n-1)}{2}$.

Exemple 4 : $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5/2 \\ 5/2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$

Définition 5 Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$. On dit que M est hermitienne si $M = {}^t\overline{M}$. On note $H_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices hermitiennes

Remarque 6 : Les termes diagonaux d'une matrice hermitiennes sont réels

Proposition 7 : $H_n(\mathbb{C}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus i A_n(\mathbb{R})$.

Exemple 8 : $\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Proposition 9 $H_n(\mathbb{C})$ forme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n^2 mais n'est pas un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

Exemple 10 : $\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix} \in H_2(\mathbb{C})$ mais $i\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & 2i \end{pmatrix} \notin H_2(\mathbb{C})$.

Définition 11 Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$.
- On dit que S est positive si pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, ${}^tx S x \geq 0$
- On dit que S est définie positive si pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, ${}^tx S x > 0$.

2) Lien avec les formes quadratiques

Définition 12 : Soit $\varphi : E \times E \to K$ une forme bilinéaire.
On dit que
- φ est symétrique si $\forall (x,y) \in E^2$, $\varphi(x,y) = \varphi(y,x)$
- φ est antisymétrique si $\forall (x,y) \in E^2$, $\varphi(x,y) = -\varphi(y,x)$

Proposition 13 : Une forme bilinéaire φ sur E est antisymétrique si $\varphi(x,x) = 0$ pour tout $x \in E$

Proposition 14 : Soit $\varphi : E \times E \to K$ bilinéaire et $\mathcal{B}$ une base de E. Alors φ est symétrique (resp. antisymétrique) ssi sa matrice dans la base $\mathcal{B}$ est symétrique (resp. antisymétrique)

Définition 15 : Soit $\varphi : E \times E \to \mathbb{C}$ une forme sesquilinéaire
On dit que φ est à symétrique hermitienne si $\forall (x,y) \in E^2$, $\varphi(x,y) = \overline{\varphi(y,x)}$.

Proposition 16 : Soit $\varphi : E \times E \to \mathbb{C}$ sesquilinéaire et $\mathcal{B}$ une base de E. Alors φ est à symétrie hermitienne ssi sa matrice dans la base $\mathcal{B}$ est hermitienne.

II Réduction

1) Orthogonalité et réduction.

On se fixe une forme quadratique (resp. hermitienne) Φ sur E, de forme polaire φ.

Définition 17
- Deux vecteurs x et y de E sont dit orthogonaux selon Φ si $\varphi(x,y) = 0$.
- Soit $A \subset E$. On appelle orthogonal de A selon Φ l'ensemble $A^\perp = \{y \in E \mid \forall x \in A, \varphi(x,y) = 0\}$.

Proposition 18 Si $A \subset E$, alors $A^\perp$ est un s.e.v de E et on a $A^\perp = \mathrm{Vect}(A)^\perp$

Proposition 19 • Si $F \subset E$, alors $F \subset F^{\perp\perp}$

• Si $A \subset B \subset E$ alors $B^\perp \subset A^\perp$

Définition 20 On appelle noyau de Φ le s.e.v de E noté $\ker \Phi$ défini par : $\ker(\Phi) = E^\perp = \{x \in E \mid \forall y \in E, \varphi(x,y) = 0\}$.
La forme Φ est dite non-dégénérée si $\ker(\Phi) = \{0\}$.

Définition 21 On appelle cône isotrope de Φ l'ensemble des vecteurs isotropes pour Φ i.e $C_\Phi = \{x \in E \mid \Phi(x) = 0\}$.
On dit que Φ est définie si $C_\Phi = \{0\}$.

Proposition 22 On a $\ker(\Phi) \subset C_\Phi$. En particulier, si Φ est définie alors Φ est non-dégénérée.

Exemple 23 Réciproque fausse. Considérer $\Phi(x,y) = x^2 - y^2$ non-dégénérée mais pas définie car $\forall x \in \mathbb{R}$, $\Phi(x,x) = \Phi(x,-x) = 0$

Définition 24 Une base B de E est dite Φ-orthogonale si pour tout $e \neq e'$ dans B, on a $\varphi(e,e') = 0$

Proposition 25 Si $B = (e_1, \dots, e_n)$ est une base Φ-orthogonale, alors $\forall (x_i) \in \mathbb{R}^n$, $\Phi\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i^2 \Phi(e_i)$.
Autrement dit la matrice de Φ dans la base B est diagonale.

Proposition 26 Il existe une base Φ orthogonale de E.

Théorème 27 (Spectral)
Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ (resp. $M \in M_n(\mathbb{C})$) une matrice symétrique (resp. hermitienne). Alors il existe une matrice C orthogonale (resp. unitaire) telle que $C^{-1}MC = C^*MC = D$, D étant une matrice diagonale réelle.

Exemple 28 $\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} =: A$ est symétrique complexe mais pas hermitienne. Le théorème spectral est mis en défaut car A n'est pas diagonalisable ($\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$)

Application 29 Si $A \in S_n(\mathbb{R})$, alors $\|A\| = \rho(A)$ où ρ désigne le rayon spectral et $\|\cdot\|$ la norme matricielle induite de $\|\cdot\|_2$ de $\mathbb{R}^n$.

2) Applications du théorème spectral

Notation 30 On note $S_n^+(\mathbb{R})$ les matrices symétriques positives et $S_n^{++}(\mathbb{R})$ les matrices symétriques définies positives

Proposition 31 Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Alors ${}^tAA \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

Proposition 32 L'ensemble $S_n^+(\mathbb{R})$ est fermé dans $M_n(\mathbb{R})$.

Théorème 33 Soit $A \in S_n^+(\mathbb{R})$. Alors il existe une unique matrice $S \in S_n^+(\mathbb{R})$ telle que $S^2 = A$.

Application 34 (Décomposition polaire) DEV1 + 33
Pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$, il existe $O \in O_n(\mathbb{R})$ et $S \in S_n^+(\mathbb{R})$ telle que $A = OS$.
De plus, si $A \in GL_n(\mathbb{R})$, la décomposition précédente est unique.

Théorème 35 (de réduction simultanée)
Soient $R \in S_n(\mathbb{R})$ et $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}RP$ et $P^{-1}SP$ soient diagonales.

Application 36 $S_n^{++}(\mathbb{R})$ est connexe.

III Applications

1) Topologie sur $S_n^{++}(\mathbb{R})$

Proposition 37. L'ensemble $S_n^{++}(\mathbb{R})$ est ouvert dans $GL_n(\mathbb{R})$

Définition 38 Soit $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. On note q_S sa forme quadratique associée définie par $q_S(x) = {}^t x S x$ sur $\mathbb{R}^n$.
et $\mathcal{E}_S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid q_S(x) \leq 1\}$ l'ellipsoïde associé.

Proposition 39. On définit la fonction $\mu : S_n^{++}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $A \mapsto \det(A)^{-1/2}$
Alors, pour tout $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, on a : $\mathrm{Vol}(\mathcal{E}_S) = \mu(S)\,\mathrm{Vol}(B)$ où B désigne la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$ munie du produit scalaire canonique.

Proposition 40. La fonction μ est strictement convexe sur $S_n^{++}(\mathbb{R})$.

Application 41. (Ellipsoïde de John - Loewner) DEV 2
Soit K un compact d'intérieur non-vide de $\mathbb{R}^n$. Il existe un unique ellipsoïde centré en 0 de volume minimal contenant K.

2) Factorisation de matrices

Définition 42 Les sous-matrices principales de $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(K)$ sont les matrices $A_k = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq k}$ où $k \in [\![1, n]\!]$ et les déterminants principaux sont les $\Delta_k = \det(A_k)$.

Théorème 43. (Décomposition LU)
Une matrice $A \in GL_n(K)$ admet une décomposition $A = LU$, où L triangulaire inférieure à diagonale unité et R triangulaire supérieure ssi tous les déterminants principaux de A sont non-nuls. Lorsqu'elle existe une telle décomposition est unique

Corollaire 44. Si $A \in GL_n(K)$ est symétrique alors il existe L triangulaire inférieure à diagonale unité et D diagonale telles que $A = L D {}^t L$

Exemple 45.
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & -2/3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3/2 & -1 \\ 0 & 0 & 4/3 \end{pmatrix}$$

Application 46. (Factorisation de Cholesky)
Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Alors $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ ssi il existe B triangulaire inférieure et inversible telle que $A = B\,{}^t B$.
De plus, une telle décomposition est unique si les coeffs diagonaux de B sont ≥ 0.

GOU	Gourdon	Algèbre.
ISE	Isenmann	L'oral à l'agreg de maths
ROM	Rombaldi	Alg. et géo.